**§ 6. Вычеты аналитических функций (продолжение)**

**Пример.** Вычислить  для функции .

***Решение*.** ▲ Особые точки функции :  и  – это полюсы 1-го порядка (простые полюсы). По формуле (3) находим:

,

.

По формуле  получаем: . ▲

Основная теорема теории вычетов и следствие из нее позволяют вычислять интегралы по замкнутым кривым в том случае, если подынтегральная функция в области, ограниченной этой кривой, имеет особые точки.

**Пример.** Вычислить интеграл .

***Решение*.** ▲ Особые точки подынтегральной функции:  . Все они являются полюсами 1-го порядка. Построив на комплексной плоскости окружность и особые точки  и , определяем, что внутри этой окружности находятся точки  и . По формуле (3) находим вычеты в этих точках:



.

Аналогично, . По формуле (8) имеем:

. ▲

**Пример.** Вычислить интеграл .

***Решение*.** ▲ Особые точки подынтегральной функции:  – устранимая особая точка и  – полюсы 1-го порядка. В круге  находятся точки  и . Так как , то  – устранимая особая точка и следовательно . Точки  – полюсы первого порядка, следовательно, по формуле (6) , имеем:

.

Согласно равенству (8) имеем:

. ▲

**Пример.** Вычислить интеграл , где *Г* – окружность .

***Решение*.** ▲ Особые точки подынтегральной функции:  . Внутри окружности *Г* лежат точки  – простой полюс, и  – полюс второго порядка. Находим вычеты в этих точках:

;

.

Следовательно,

. ▲

**п. 2. Приложения вычетов для вычисления определенных и несобственных**

**интегралов**

С помощью вычетов можно вычислять некоторые определенные и несобственные интегралы.

1. *Интегралы вида* , где *R* – рациональная функция от  и . Сделаем замену переменной интегрирования, введя комплексную переменную:

. (10)

При изменении  от нуля до  (т.к. ), комплексная переменная  пробегает замкнутый контур – окружность , т.е. функция  отображает отрезок  на окружность , ориентированную положительно. В результате исходный интеграл преобразуется в контурный интеграл

, (11)

вычисляемый с помощью вычетов.

**Пример.** Вычислить интеграл .

***Решение*.** ▲ Вводим замену . Тогда, согласно (10) и (11), получим:

. Подынтегральная функция  имеет особые точки . Обе эти точки – простые полюсы. В круге  находится только одна из этих точек, а именно точка . В этой точке . По основной теореме о вычетах получаем:

. ▲

1. *Интегралы вида* , где  – рациональная функция вида , где  и  – многочлены степеней *m* и *n* соответственно. Если  непрерывна на всей действительной оси () и , т.е. степень знаменателя по крайней мере на 2 единицы больше, чем степень числителя, то

, (12)

где – сумма вычетов функции  во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости (т.к. существенно особых точек у рациональных функций нет).

Таким образом, если  – полюсы функции , лежащие в верхней полуплоскости комплексной плоскости (т.е. ), то

. (13)

Аналогично, при условии 

. (14)

**Пример.** Вычислить интеграл .

***Решение*.** ▲ Для функции  условие  выполнено. Особыми точками функции  являются точки  (это полюсы второго порядка), и  (это полюсы первого порядка). В верхней полуплоскости расположены точки  и . По формуле (13): . Находим вычеты:



;

.

Окончательно имеем:

. ▲

1. *Интегралы вида* .

Для вычисления этих интегралов используется следующая теорема.

**Теорема (лемма Жордана).** Пусть функция является аналитической в области  всюду, за исключением конечного числа особых точек. Если , где  – верхняя полуокружность радиуса *R* с центром в точке, то при 

. (15)

(*Без доказательства*)

Если функция  удовлетворяет условиям леммы Жордана, то при 

. (16)

Аналогично, при 

. (17)

**Замечание.** Для вычисления интегралов  нужно в интеграле (16) выделить действительную и мнимую части.

**Пример.** Вычислить интеграл .

***Решение*.** ▲ Рассмотрим следующий интеграл:

. Согласно заме- чанию, . В нашем случае , а особыми точками функции  в верхней полуплоскости являются точки  и  (обе эти точки – полюсы первого порядка). Так как

, а ,

то по формуле (16) с учетом равенства  получаем:

.